



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Tesi di Laurea in Ingegneria dell'Informazione

Chiara Favaretto

**Dalla stima al controllo della
dinamica glucosio - insulina in pazienti
diabetici**

Relatore: Prof. Mauro Bisiacco

Anno Accademico 2011/2012

Indice

1	Introduzione	3
2	Modellizzazione del problema	4
2.1	Ipotesi e modello di stato non lineare	4
2.2	Linearizzazione del modello non lineare	5
3	Stimatori ai minimi quadrati	7
3.1	Stimatore a tempo continuo	7
3.2	Stimatore a tempo discreto	9
3.3	Costruzione degli estimatori con Simulink	10
3.3.1	Stimatore a tempo continuo	10
3.3.2	Stimatore a tempo discreto	12
3.4	Confronto tra gli estimatori realizzati	15
3.4.1	Confronto tra i due estimatori a tempo discreto con $T = 0.1 \text{ sec}$ e potenza del rumore di 0.1	15
3.4.2	Confronto tra gli estimatori a tempo continuo e a tempo discreto, con $T = 0.01 \text{ sec}$ e potenza del rumore di 0.1	16
4	Utilizzo della stima per realizzare il controllo	18
4.1	Controllo nel caso continuo	18
4.2	Controllo nel caso discreto	22
4.2.1	Controllore discreto con $T = T_1 = 0.1 \text{ sec}$	22
4.2.2	Controllore discreto con $T = T_2 = 0.01 \text{ sec}$	24

Capitolo 1

Introduzione

La scelta dell'argomento di questa tesi nasce dalla volontà di mettere in pratica alcuni studi teorici affrontati nei corsi di Sistemi e Modelli e di Controlli Automatici. In particolare, è mio interesse evidenziare un collegamento tra queste materie e problemi relativi alla Bioingegneria.

In questa sede ci proponiamo di affrontare la questione della dinamica di glucosio e insulina nel sangue, al fine di realizzare degli stimatori in grado di rilevare la presenza e la gravità della malattia del diabete nei soggetti osservati.

Successivamente, in base al valore rilevato, ci occuperemo di sviluppare una semplice tecnica di controllo, per il trattamento dei soggetti affetti da diabete.

Ringrazio il Prof. Bisiacco per la disponibilità che mi ha offerto durante le lezioni e soprattutto durante la stesura della Tesi. Il suo entusiasmo e la sua fiducia negli studenti hanno fatto nascere in me la passione per questa materia di studio.

Capitolo 2

Modellizzazione del problema

2.1 Ipotesi e modello di stato non lineare

Per descrivere il sistema, scegliamo una sua rappresentazione tramite *modello di stato*: esso si basa su alcune ipotesi semplificative, che vengono riportate qui di seguito. Innanzitutto definiamo le variabili di stato e gli ingressi:

- $x_1(t)$: concentrazione di glucosio nel sangue;
- $x_2(t)$: concentrazione di insulina nel sangue;
- $u_1(t)$: ingresso di cibo dall'esterno;
- $u_2(t)$: ingresso di insulina eventualmente iniettata dall'esterno.

Il modello che utilizzeremo si basa sulle seguenti ipotesi inerenti la dinamica delle due grandezze in questione.

Ipotesi riguardanti l'insulina:

1. Dopo un certo periodo di digiuno, la concentrazione di insulina nel sangue è nulla;
2. Se la concentrazione di glucosio nel sangue è maggiore di un certo valore K , il pancreas secerne una quantità di insulina proporzionale alla differenza tra la concentrazione di glucosio presente e tale valore K . Viceversa, se la concentrazione di glucosio risulta essere inferiore a K , il pancreas secerne una quantità di insulina pari a zero;
3. Se si introduce artificialmente insulina dall'esterno, la sua concentrazione nel sangue aumenta proporzionalmente alla quantità introdotta;
4. La concentrazione di insulina nel sangue diminuisce proporzionalmente alla concentrazione stessa.

Ipotesi riguardanti il glucosio:

1. Dopo un certo periodo di digiuno, la concentrazione di glucosio nel sangue si stabilizza ad un valore di equilibrio K ;
2. L'ingresso di cibo dall'esterno provoca un aumento della concentrazione del glucosio proporzionale alla quantità di cibo ingerita;
3. La concentrazione di insulina nel sangue diminuisce proporzionalmente al prodotto tra la concentrazione di insulina e del glucosio stesso nel sangue;

4. Se la concentrazione di glucosio scende al di sotto del valore di equilibrio K , il fegato rilascia una quantità di glucosio proporzionale alla differenza tra tale valore K e la concentrazione di glucosio stessa. Viceversa, se la densità di glucosio è superiore a K , il fegato non interviene in alcun modo.

Alla luce di queste ipotesi, possiamo scrivere il seguente modello di stato non lineare:

- se $x_1(t) \geq K$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -a_1 x_1 x_2 + b_1 u_1 \\ \dot{x}_2 = a_2(x_1 - K) - a_3 x_2 + b_2 u_2 \end{cases}$$

- se $x_1(t) \leq K$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -a_1 x_1 x_2 + a_4(x_1 - K) + b_1 u_1 \\ \dot{x}_2 = -a_3 x_2 + b_2 u_2 \end{cases}$$

La parte del modello a cui siamo interessati è quella inerente alla condizione: $x_1(t) \geq K$, perciò d'ora in avanti considereremo soltanto questo primo caso. In particolare, misuriamo x_1 e x_2 in mg/cc, il tempo in ore, u_1 e u_2 in mg/cc e consideriamo i seguenti valori per i parametri:

$$a_1 = 0.05 \text{ mg/dl}$$

$$a_3 = 2 \text{ h}^{-1}$$

$$b_1 = 1 \text{ dl}^{-1}$$

$$b_2 = 1 \text{ dl}^{-1}$$

$$K = 100 \text{ mg/dl}$$

Ciò che determina la differenza tra un paziente sano e un paziente affetto da diabete consiste nel valore del parametro a_2 , in particolare:

- $a_2 = 0.5 \text{ h}^{-1}$ per pazienti sani;
- $a_2 = 0.01 \text{ h}^{-1}$ per pazienti malati.

Ovviamente si tratta di una semplificazione della realtà (in particolare, la gravità della malattia può determinare diversi valori di a_2), ma al fine di raggiungere il nostro obiettivo, tale modello può considerarsi adeguato alla nostra analisi.

2.2 Linearizzazione del modello non lineare

Per poter continuare la nostra analisi, si rende necessario linearizzare il modello appena presentato attorno al punto di equilibrio naturale, discendente dalle ipotesi 1. dell'insulina e 1. del glucosio, $(x_1, x_2) = (K, 0)$.

Attraverso la valutazione dello Jacobiano nel punto di equilibrio, si arriva al seguente modello di stato linearizzato:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -a_1 K x_2 + b_1 u_1 \\ \dot{x}_2 = a_2(x_1 - K) - a_3 x_2 + b_2 u_2 \end{cases}$$

Il valore di uscita che andremo poi a rilevare sarà l'aumento di concentrazione di glucosio nel sangue rispetto al valore di equilibrio K , perciò risulta utile effettuare un cambio di variabile:

$$y(t) = x_1(t) - K.$$

Di conseguenza, il modello di stato diventa:

$$\begin{cases} \dot{y} = \dot{x}_1 = -a_1 K x_2 + b_1 u_1 \\ \dot{x}_2 = a_2 y - a_3 x_2 + b_2 u_2 \end{cases}$$

Ovvero:

$$\begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -a_1 K \\ a_2 & -a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Per calcolare le funzioni di trasferimento tra l'uscita e gli ingressi, è conveniente utilizzare le Trasformate di Laplace:

$$\begin{cases} sY(s) - y(0) = -a_1 K X_2(s) + b_1 U_1(s) \\ sX_2(s) - x_2(0) = a_2 Y(s) - a_3 X_2(s) + b_2 U_2(s) \end{cases}$$

Da cui, attraverso dei semplici passaggi algebrici, si giunge all'espressione:

$$Y(s) = \underbrace{\frac{(s+a_3)y(0)}{s(s+a_3)+a_1a_2K} - \frac{a_1Kx_2(0)}{s(s+a_3)+a_1a_2K}}_{Y_l(s)} + \underbrace{\frac{b_1(s+a_3)}{s(s+a_3)+a_1a_2K}U_1(s) - \frac{a_1Kb_2}{s(s+a_3)+a_1a_2K}U_2(s)}_{Y_f(s)},$$

dove $Y_l(s)$ dipende solo dalle condizioni iniziali e $Y_f(s)$ dipende solo dagli ingressi, considerando nulle le condizioni iniziali.

Di conseguenza, le funzioni di trasferimento in gioco sono:

- $G_1(s) = \frac{b_1(s+a_3)}{s(s+a_3)+a_1a_2K}$;
- $G_2(s) = -\frac{a_1Kb_2}{s(s+a_3)+a_1a_2K}$.

Il nostro interesse a questo punto si focalizza sulla funzione di trasferimento $G_1(s)$ tra l'uscita e l'ingresso di cibo dall'esterno. Essa infatti assume un'espressione diversa a seconda che il paziente in questione sia sano oppure diabetico. Sostituendo i valori sopraccitati ai parametri, si ottiene:

- $G_1(s) = \frac{s+2}{s^2+2s+2.5}$, per pazienti sani;
- $G_1(s) = \frac{s+2}{s^2+2s+c}$, per pazienti malati, dove c dipende dalla gravità della malattia. (Il caso $c = 0.05$ corrisponde ad una gravità della malattia molto elevata).

Come si può facilmente osservare, l'unica differenza tra le due FdT consiste nel termine noto del denominatore. Il nostro scopo sarà quello di costruire due stimatori ai minimi quadrati per stimare il valore di tale parametro, a partire dalla conoscenza dell'ingresso e dalla misurazione dell'uscita.

I due stimatori differiranno l'uno dall'altro, in quanto uno sarà calcolato nel dominio del tempo continuo e uno nel discreto: un'analisi della precisione e della velocità con cui raggiungono il valore del parametro, ci permetterà di confrontare tra loro i suddetti stimatori.

Capitolo 3

Stimatori ai minimi quadrati

3.1 Stimatore a tempo continuo

Consideriamo la funzione di trasferimento

$$G_1(s) = \frac{s+2}{s^2+2s+\theta},$$

dipendente dal parametro θ che vogliamo stimare.

Tale FdT corrisponde al seguente modello I/O:

$$\ddot{y}(t) - a_0 \dot{y}(t) - by(t) = c_0 \dot{u}(t) + d_0 u(t),$$

dove i parametri a_0, c_0, d_0 sono noti e b è da stimare:

$$a_0 = -2; \quad b = -\theta, \quad c_0 = 1, \quad d_0 = 2.$$

Quindi l'equazione differenziale diventa:

$$\ddot{y}(t) + 2 \dot{y}(t) + \theta y(t) = \dot{u}(t) + 2u(t).$$

Lo stimatore ai minimi quadrati si calcola cercando di minimizzare l'errore quadratico medio tra la realtà e il modello, integrato nell'intervallo di tempo in cui si svolge la misurazione.

Definiamo perciò la funzione errore $e(t)$:

$$\begin{aligned} e(t) &:= \ddot{y}(t) - a_0 \dot{y}(t) - by(t) - c_0 \dot{u}(t) - d_0 u(t) \\ &= \ddot{y}(t) - \begin{bmatrix} \dot{y}(t) & y(t) & \dot{u}(t) & u(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b \\ c_0 \\ d_0 \end{bmatrix} \\ &= \ddot{y}(t) - \begin{bmatrix} \dot{y}(t) & \dot{u}(t) & u(t) & y(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ c_0 \\ d_0 \\ b \end{bmatrix} \end{aligned}$$

L'errore quadratico perciò risulta:

$$\begin{aligned}
e^2(t) &= e^T(t)e(t) = \begin{bmatrix} \ddot{y}(t) - [a_0 & c_0 & d_0 & b] \begin{bmatrix} \dot{y}(t) \\ \dot{u}(t) \\ u(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{y}(t) - [\dot{y}(t) & \dot{u}(t) & u(t) & y(t)] \begin{bmatrix} a_0 \\ c_0 \\ d_0 \\ b \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\
&= [\cdot \cdot \cdot] \\
&= [1 \quad -a_0 \quad -c_0 \quad -d_0 \quad | \quad -b] \begin{bmatrix} \ddot{y}^2(t) & \ddot{y}(t)\dot{y}(t) & \ddot{y}(t)\dot{u}(t) & \ddot{y}(t)u(t) & \ddot{y}(t)y(t) \\ \ddot{y}(t)\dot{y}(t) & \dot{y}^2(t) & \dot{y}(t)\dot{u}(t) & \dot{y}(t)u(t) & \dot{y}(t)y(t) \\ \ddot{y}(t)\dot{u}(t) & \dot{y}(t)\dot{u}(t) & \dot{u}^2(t) & \dot{u}(t)u(t) & \dot{u}(t)y(t) \\ \ddot{y}(t)u(t) & \dot{y}(t)u(t) & \dot{u}(t)u(t) & u^2(t) & u(t)y(t) \\ \ddot{y}(t)y(t) & \dot{y}(t)y(t) & \dot{u}(t)y(t) & u(t)y(t) & y^2(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -a_0 \\ -c_0 \\ -d_0 \\ -b \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

E, integrando, si ottiene:

$$\begin{aligned}
\int_0^T e^2(t) dt &= [1 \quad -a_0 \quad -c_0 \quad -d_0 \quad | \quad -b] \begin{bmatrix} \int_0^T \ddot{y}^2(t) dt & \cdots & \int_0^T \ddot{y}(t)y(t) dt \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_0^T \ddot{y}(t)y(t) dt & \cdots & \int_0^T y^2(t) dt \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -a_0 \\ -c_0 \\ -d_0 \\ -b \end{bmatrix} \\
&= [1 \quad -a_0 \quad -c_0 \quad -d_0 \quad | \quad -b] \begin{bmatrix} \bar{A}(T) & \bar{S}^T(T) \\ \bar{S}(T) & \bar{R}(T) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -a_0 \\ -c_0 \\ -d_0 \\ -b \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Di conseguenza, si ottiene:

$$\int_0^T e^2(t) dt = [1 \quad -a_0 \quad -c_0 \quad -d_0] \bar{a}(T) \begin{bmatrix} 1 \\ -a_0 \\ -c_0 \\ -d_0 \end{bmatrix} - \underbrace{[1 \quad -a_0 \quad -c_0 \quad -d_0] \bar{S}^T(T)}_{\bar{S}^T(T)} \underbrace{b - b \bar{S}(T)}_{\bar{S}(T)} \begin{bmatrix} 1 \\ -a_0 \\ -c_0 \\ -d_0 \end{bmatrix} + b^T \bar{R}(T) b$$

Si può dimostrare che lo stimatore ai minimi quadrati per il parametro b , che corrisponde al valore che minimizza l'integrale sovrastante, è:

$$\hat{b}(T) = \tilde{S}^T(T) \bar{R}^{-1}(T),$$

che, essendo uno scalare, diventa:

$$\begin{aligned}
\hat{b}(T) &= \frac{\tilde{S}(T)}{\bar{R}(T)} = \frac{\int_0^T \ddot{y}(t)y(t) dt - a_0 \int_0^T \dot{y}(t)y(t) dt - c_0 \int_0^T \dot{u}(t)y(t) dt - d_0 \int_0^T u(t)y(t) dt}{\int_0^T y^2(t) dt} \\
&= \frac{\int_0^T \ddot{y}(t)y(t) dt + 2 \int_0^T \dot{y}(t)y(t) dt - \int_0^T \dot{u}(t)y(t) dt - 2 \int_0^T u(t)y(t) dt}{\int_0^T y^2(t) dt}.
\end{aligned}$$

Osserviamo però che il valore che stiamo cercando è:

$$\hat{\theta}(T) = -\hat{b}(T).$$

Esiste un teorema che dimostra che, sotto opportune ipotesi, tale stimatore converge al valore esatto per t tendente all'infinito, ma tale dimostrazione non verrà sviluppata in questa sede, in cui ci limiteremo a verificare che ciò effettivamente avvenga.

Prima di realizzare lo stimatore appena descritto con l'utilizzo di Simulink, calcoliamo anche lo stimatore ai minimi quadrati per il caso discreto.

3.2 Stimatore a tempo discreto

Per costruire un modello I/O discreto che ricalchi approssimativamente il modello a tempo continuo appena esaminato: $\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + \theta y(t) = \dot{u}(t) + 2u(t)$, dobbiamo effettuare alcune approssimazioni:

- $\dot{y}(t) \cong \frac{y(t) - y(t-T)}{T}$;
- $\ddot{y}(t) \cong \frac{\dot{y}(t) - \dot{y}(t-T)}{T} \cong \frac{\frac{y(t) - y(t-T)}{T} - \frac{y(t-T) - y(t-2T)}{T}}{T} = \frac{y(t) - 2y(t-T) + y(t-2T)}{T^2}$
- $\dot{u}(t) \cong \frac{u(t) - u(t-T)}{T}$.

Il nostro modello perciò diventa:

$$y(t-2T) + \underbrace{(-2-2T)}_{-A_0} y(t-T) + \underbrace{(1+2T+\theta T^2)}_{-B} y(t) = \underbrace{-T}_{C_0} u(t-T) + \underbrace{(T+2T^2)}_{D_0} u(t),$$

dove, una volta stabilito il periodo di campionamento T , i coefficienti A_0 , C_0 e D_0 sono noti, mentre il parametro B è da stimare.

Seguendo un procedimento analogo a quello visto nel caso continuo, calcoliamo:

$$\begin{aligned} \sum_{t=2}^N e^2(t) &= \begin{bmatrix} 1 & -A_0 & -C_0 & -D_0 & | & -B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{t=2}^N A(t) & \sum_{t=2}^N S^T(t) \\ \sum_{t=2}^N S(t) & \sum_{t=2}^N R(T) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -A_0 \\ -C_0 \\ -D_0 \\ -B \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -A_0 & -C_0 & -D_0 & | & -B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{A}(N) & \bar{S}^T(N) \\ \bar{S}(N) & \bar{R}(N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -A_0 \\ -C_0 \\ -D_0 \\ -B \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Chiamiamo:

$$\tilde{S}^T(N) := \begin{bmatrix} 1 & -A_0 & -C_0 & -D_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{t=2}^N y(t-2T)y(t) \\ \sum_{t=2}^N y(t-T)y(t) \\ \sum_{t=2}^N u(t-T)y(t) \\ \sum_{t=2}^N u(t)y(t) \end{bmatrix}$$

$$\tilde{R}(N) := \sum_{t=2}^N y^2(t).$$

La stima ai minimi quadrati del parametro B , risulta perciò:

$$\hat{B}_T(N) = \frac{\tilde{S}(N)}{\tilde{R}(N)} = \frac{\sum_{t=2}^N y(t-2T)y(t) - A_0 \sum_{t=2}^N y(t-T)y(t) - C_0 \sum_{t=2}^N u(t-T)y(t) - D_0 \sum_{t=2}^N u(t)y(t)}{\sum_{t=2}^N y^2(t)}.$$

Anche in questo caso osserviamo che la stima del parametro della Funzione di Trasferimento che stiamo cercando è:

$$\hat{\theta}_T(N) = \frac{\hat{B}_T(N) - 1 - 2T}{T^2}.$$

3.3 Costruzione degli stimatori con Simulink

Nella nostra trattazione stiamo supponendo che il modello per soggetti sani sia adeguato per qualsiasi tipo di ingresso $u_1(t)$ e che per tali soggetti non sia necessario un apporto di insulina dall'esterno (cioè $u_2(t) \equiv 0$, per i pazienti sani).

Per simulare l'introduzione di cibo dall'esterno, consideriamo il segnale d'ingresso

$$u_1(t) = 100e^{-0.5t},$$

che, essendo un segnale esponenziale decrescente, approssima discretamente la digestione del cibo.

Ci occuperemo ora di costruire, attraverso l'uso di Simulink, gli stimatori ai minimi quadrati che abbiamo calcolato analiticamente. In questo modo potremo verificare la correttezza delle espressioni trovate e potremo valutare le prestazioni di tali stimatori. Infine sarà interessante confrontarli tra loro e capire quale dei due sia più efficiente.

3.3.1 Stimatore a tempo continuo

$$\hat{\theta}(T) = -\hat{b}(T) = -\frac{\int_0^T \ddot{y}(t)y(t) dt + 2 \int_0^T \dot{y}(t)y(t) dt - \int_0^T \dot{u}(t)y(t) dt - 2 \int_0^T u(t)y(t) dt}{\int_0^T y^2(t) dt}.$$

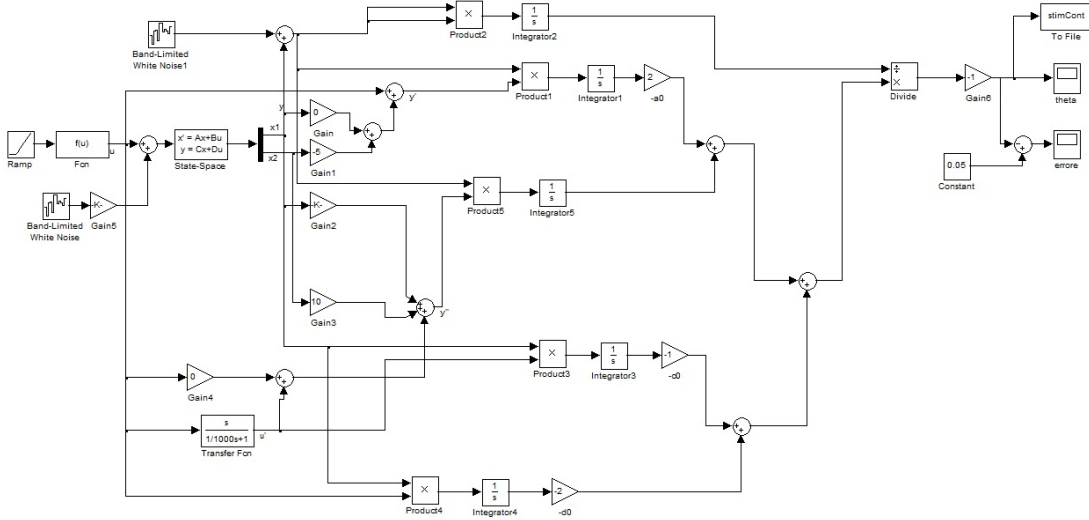


Figura 3.1: Modello a blocchi per lo stimatore del parametro incognito della $G_1(s)$ nel caso continuo

Il modello in Figura 3.1, in cui abbiamo aggiunto del rumore bianco sia in ingresso che in uscita (errori di misurazione), rappresenta lo stimatore del parametro incognito nel caso di un paziente gravemente malato: il valore esatto del parametro da stimare è pertanto: $\theta = 0.05$. Eseguendo la simulazione, otteniamo il risultato in Figura 3.2: osservando l'uscita si può notare che lo stimatore funziona correttamente e che già dopo 0.025 secondi il segnale è a regime.



Figura 3.2: Stima del parametro di un paziente malato

NOTA: Per calcolare $\dot{y}(t)$ e $\ddot{y}(t)$ abbiamo seguito il seguente procedimento:

- $\dot{y}(t) = H \dot{x}(t) = H [Fx(t) + Gu(t)] = HFx(t) + HGu(t)$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 0.01 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -5 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} = 0y(t) - 5x_2(t) + 1u(t);$$
- $\ddot{y}(t) = H\ddot{x}(t) = HF\dot{x}(t) + HG\dot{u}(t)$

$$= HF[Fx(t) + Gu(t)] + HG\dot{u}(t) = HF^2x(t) + HFGu(t) + HG\dot{u}(t)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 0.01 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 0.01 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 0.01 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{u}(t)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.05 & 10 \\ -0.02 & 3.95 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + 1\dot{u}(t)$$

$$= \begin{bmatrix} -0.05 & 10 \end{bmatrix} x(t) + 0u(t) + \dot{u}(t) = -0.05y(t) + 10x_2(t) + \dot{u}(t);$$
- Per calcolare $\dot{u}(t)$ invece abbiamo usato la Funzione di Trasferimento

$$G(s) = \frac{s}{\frac{1}{1000}s + 1}.$$

Un modello a blocchi analogo è stato utilizzato per realizzare lo stimatore nel caso di un paziente sano¹, il cui parametro vale: $\theta = 2.5$. Anche in questo caso, come si può vedere in Figura 3.3, lo stimatore raggiunge il valore corretto. In questo caso però il transitorio è un po' più lungo: il segnale infatti impiega circa 3.5 secondi prima di arrivare a regime.

¹per costruire $\dot{y}(t)$, $\ddot{y}(t)$ e $\dot{u}(t)$ è stato usato un procedimento analogo al caso del paziente malato:

$$\dot{y}(t) = [...] = -5x_2(t) + u(t);$$

$$\ddot{y}(t) = [...] = -2.5y(t) + 10x_2(t) + \dot{u}(t);$$

$$\dot{U}(s) = \frac{s}{\frac{1}{1000}s + 1} U(s).$$

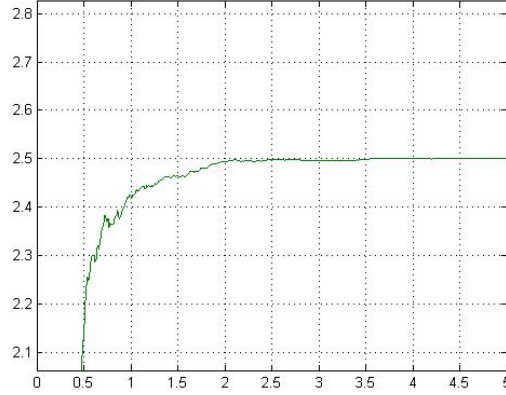


Figura 3.3: Stima del parametro di un paziente sano

3.3.2 Stimatore a tempo discreto

Per costruire lo stimatore a tempo discreto, sono state utilizzate due procedure differenti:

1. a partire dal caso continuo, sono stati campionati i segnali $u(t)$ ed $y(t)$, per diversi valori del periodo T ;
 2. a partire dall'equazione differenziale, sono stati costruiti direttamente i segnali a tempo discreto $u(t)$ ed $y(t)$ per $t \in Z$.
1. Per costruire il modello a partire dal caso continuo, questa volta è stato implementato un procedimento leggermente diverso da quello presentato nello stimatore nel caso continuo: anzichè utilizzare una funzione di trasferimento $G(s)$, si è preferito costruire $\ddot{y}(t)$ a partire dall'equazione differenziale, ovvero:

$$\ddot{y}(t) = -2\dot{y}(t) - \theta y(t) + \dot{u}(t) + 2u(t) + e(t)$$

Dopodichè sono stati utilizzati dei blocchi integratori $1/s$ per ricostruire i segnali $\dot{y}(t)$ e $y(t)$. Analogamente, anzichè mandare in ingresso $u(t)$, è stata utilizzata la sua derivata: $\dot{u}(t) = -50e^{(-0.5t)}$, da cui si è ricavato $u(t)$ tramite un integratore (con condizioni iniziali pari a 100).

Successivamente, i segnali $u(t)$ ed $y(t)$ sono stati campionati per diversi valori del periodo ($T = 0.1$ e $T = 0.01$) e sono state utilizzate delle funzioni di trasferimento discrete del tipo:

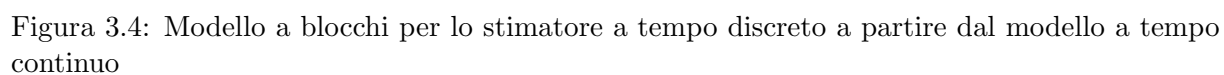
$$W(z) = \frac{1}{z}$$

per ricostruire i segnali $u(t - T)$, $y(t - T)$ e $y(t - 2T)$.

Infine, anzichè utilizzare un blocco sommatore (analogo al blocco integratore nel caso continuo), si è preferito utilizzare la FdT discreta $W(z) = \frac{z}{z-1}$, che corrisponde all'equazione alle differenze: $y(t) = y(t - T) + u(t)$, che rappresenta proprio il cosiddetto *integratore discreto*.

Nelle Figure 3.5 e 3.6, riportiamo le stime ottenute per i diversi valori del periodo di tempo T utilizzati.

Si può osservare che i transitori degli stimatori discreti sono molto più lunghi rispetto a quello dello stimatore realizzato nel caso continuo. In particolare:



2. Per costruire lo stimatore a partire direttamente dal discreto, è stato utilizzato un procedimento analogo a quello appena trattato, ovvero, anziché servirsi della funzione di trasferimento discreta, è stato costruito il segnale $y(t - 2T)$ a partire dall'equazione alle differenze:

$\text{con } \theta = 0.05.$

[illegible]

Figura 3.7: Modello a blocchi per lo stimatore a tempo discreto

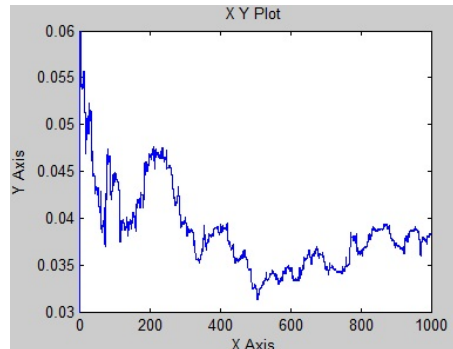


Figura 3.8: Stima del parametro con $T = 1 \text{ sec}$

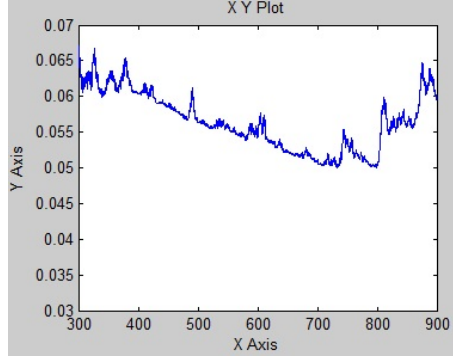


Figura 3.9: Stima del parametro con $T = 0.1 \text{ sec}$

3.4 Confronto tra gli stimatori realizzati

Dopo aver realizzato gli stimatori sopra descritti e aver osservato i risultati trovati singolarmente, è interessante poter fare, almeno approssimativamente, un confronto tra i diversi stimatori. Osserviamo cioè di quanto si discostano le stime trovate dal valore vero del parametro $\theta = 0.05$ utilizzato nel sistema: ovviamente, verrà considerato migliore lo stimatore che rende più piccola tale differenza, considerata in valore assoluto: $|\theta - \hat{\theta}| = |0.05 - \hat{\theta}|$.

3.4.1 Confronto tra i due stimatori a tempo discreto con $T = 0.1 \text{ sec}$ e potenza del rumore di 0.1

Dopo aver calcolato le distanze dal valore vero per ciascuno dei due stimatori a tempo discreto ed averle chiamate rispettivamente:

- d_1 : la distanza relativa allo stimatore costruito totalmente nel discreto;
- d_2 : la distanza relativa allo stimatore a tempo discreto realizzato a partire da uno schema a tempo continuo,

osserviamo la Figura 3.10, che rappresenta la funzione differenza: $d_1 - d_2$.

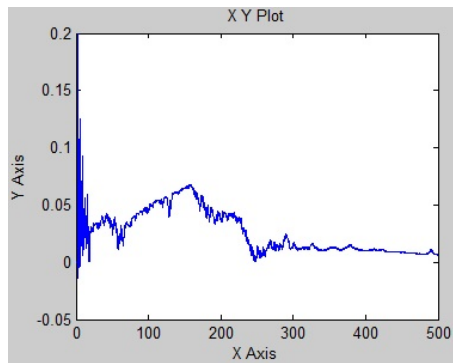


Figura 3.10: Confronto tra stimatori a tempo discreto con $T = 0.1 \text{ sec}$

Anche se un rapido sguardo potrebbe far sembrare le stime pressochè uguali (dato che vi è una differenza massima non superiore a 0.1, non dobbiamo dimenticare che il parametro ha un valore molto piccolo (0.05), perciò, almeno nei primi 300 secondi, i due stimatori differiscono di

una quantità confrontabile con il parametro stesso. La loro differenza supera addirittura i $\frac{5}{100}$ nell'intervallo di tempo che va dai 150 ai 200 secondi. A regime, comunque, si può notare come le due stime si assomiglino sempre più.

In ogni caso, essendo tale differenza sempre maggiore di zero, lo stimatore a tempo discreto realizzato campionando i segnali continui, risulta essere migliore di quello realizzato direttamente a partire da un sistema a tempo discreto.

3.4.2 Confronto tra gli stimatori a tempo continuo e a tempo discreto, con $T = 0.01 \text{ sec}$ e potenza del rumore di 0.1

Per confrontare gli stimatori a tempo continuo e discreto, è stato scelto lo stimatore a tempo discreto con periodo di campionamento inferiore tra tutti quelli realizzati, poichè la teoria assicura che esso sia il migliore.

Chiamiamo perciò:

- d_3 : distanza dal valore vero relativa allo stimatore nel caso continuo;
- d_4 : distanza relativa allo stimatore discreto.

I grafici in Figura 3.11 rappresentano la funzione differenza $d_3 - d_4$ in intervalli di tempo differenti.

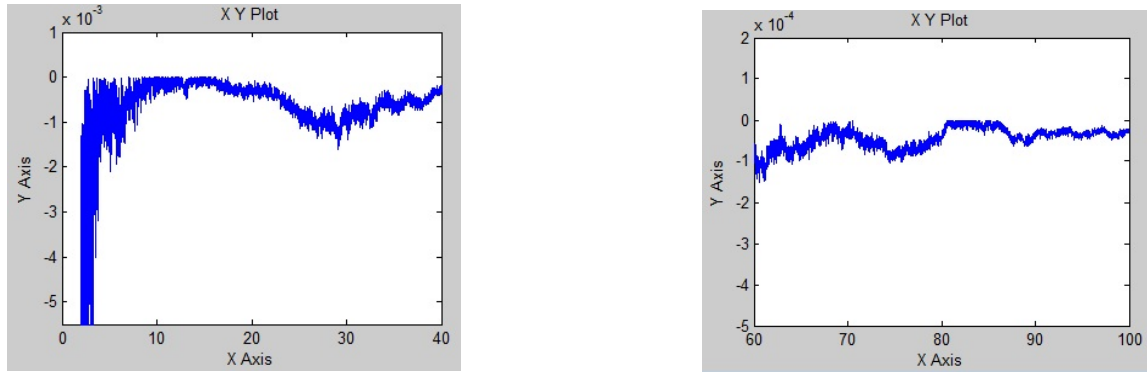


Figura 3.11: Confronto tra stimatore continuo e discreto (con $T = 0.01 \text{ sec}$)

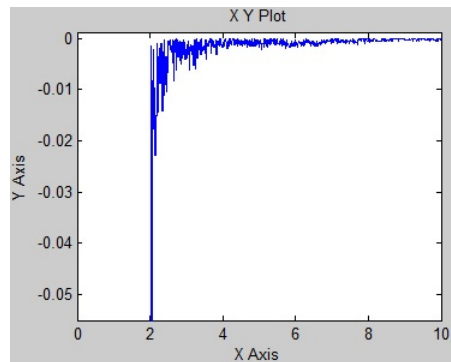


Figura 3.12: Confronto tra stimatore continuo e discreto (con $T = 0.01 \text{ sec}$)

Anche in questo caso, possiamo osservare che la stima realizzata nell'ambito discreto risulta essere peggiore di quella nel caso continuo: la funzione differenza infatti si mantiene sempre

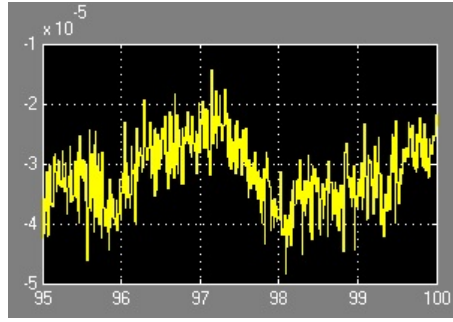


Figura 3.13: Confronto tra stimatore continuo e discreto (con $T = 0.01 \text{ sec}$)

sotto lo zero.

Osservando la Figura 3.12, notiamo che, soprattutto nel periodo iniziale, la stima discreta è abbastanza peggiorativa, essa infatti dista dalla stima continua di una quantità confrontabile con il valore reale del parametro. Già dopo 4 *sec* però la differenza diminuisce di un fattore 10. Infine, come si vede dall'ingrandimento (in Figura 3.13), a regime la differenza è praticamente impercettibile, in quanto si stabilizza ad una quantità dell'ordine di 10^{-5} , molto inferiore a 0.05.

Non dobbiamo stupirci del fatto che gli stimatori realizzati a tempo discreto si siano rivelati peggiori nelle prestazioni rispetto a quelli continui: dobbiamo ricordare infatti che, per calcolare tali stimatori, ci siamo serviti di un'equazione alle differenze, ottenuta mediante delle approssimazioni tanto più vicine alla realtà, quanto più il periodo T diminuisce. Non solo, ci siamo limitati ad approssimare la derivata tramite semplice rapporto incrementale, che è uno dei più semplici ma anche più *rozzi* metodi numerici adatti a tale scopo. Inevitabile quindi che la presenza di errori di approssimazione abbia delle serie ripercussioni sulla qualità delle stime ottenute. Per motivi pratici, legati ai limiti numerici di Simulink, non è stato possibile utilizzare periodi di campionamento molto piccoli, perciò questi stimatori permettono di raggiungere una stima solamente molto approssimata del valore vero del parametro.

Capitolo 4

Utilizzo della stima per realizzare il controllo

Uno stimatore come quelli che abbiamo progettato, può permettere di capire quindi (tenendo conto di tutte le approssimazioni e delle ipotesi semplificative che abbiamo utilizzato in questa analisi) se un paziente è affetto o meno da diabete e, in caso positivo, con che gravità è presente la malattia.

Esso può dunque essere utilizzato per capire in che modo e in quale misura intervenire dall'esterno per far sì che la risposta al sistema dei soggetti malati si avvicini il più possibile a quella dei soggetti sani.

È qui che interviene il secondo ingresso $u_2(t)$, menzionato nella presentazione del modello, che corrisponde all'introduzione artificiale di insulina dall'esterno.

Innanzitutto osserviamo come reagisce un soggetto sano all'ingresso esponenziale decrescente $u_1(t) = 100e^{-0.5t}$ che abbiamo utilizzato nella costruzione del nostro sistema a blocchi. (Ribadiamo che la scelta di tale segnale d'ingresso è appropriata in quanto, se si considera il tempo in ore, la risposta del sistema al segnale è una discreta approssimazione dell'andamento del livello glicemico, che si registra effettivamente in un paziente nella realtà).

Nelle Figure 4.1 e 4.2 possiamo visualizzare il modello a blocchi e l'uscita prodotta.

Dal grafico possiamo osservare che la concentrazione di glucosio nel sangue di un soggetto sano si discosta dalla soglia di $K = 100 \text{ mg/dl}$ al massimo di 60 unità e che in poche ore rientra nei valori normali, cosa che approssima discretamente la realtà.

Un paziente malato invece, reagisce allo stesso ingresso $u_1(t)$ con una risposta molto differente, che è rappresentata in Figura 4.3. Si può chiaramente notare come la situazione sia drasticamente peggiorata: il livello glicemico nel sangue arriva a scostarsi dal valore di equilibrio per quasi 180 unità e occorrono almeno 60 ore perchè rientri nei valori normali.

4.1 Controllo nel caso continuo

Una volta stimato il valore del parametro indicante la malattia, si può intervenire nel sistema con un controllore, sfruttando la possibilità di introdurre insulina dall'esterno, per far sì che la risposta all'ingresso di un paziente malato si avvicini il più possibile a quella di un paziente sano.

$$Y_{malato}(s) = G_1(s)U_1(s) + G_2(s)U_2(s)$$

Se retroazioniamo il secondo ingresso (ingresso di controllo), possiamo fare in modo che $Y_{malato}(s) = Y_{sano}(s)$:

$$U_2(s) = C(s)Y(s) \Rightarrow Y_{malato}(s) = G_1(s)U_1(s) + G_2(s)C(s)Y(s)$$

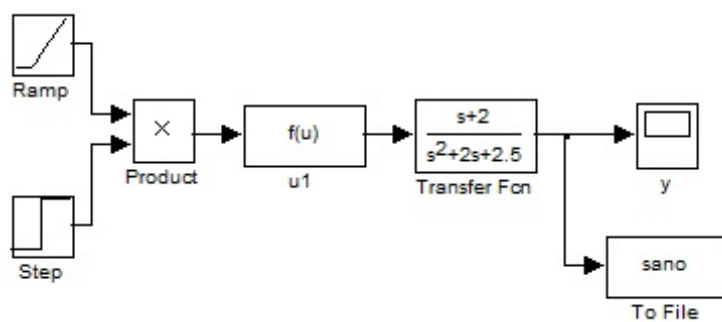


Figura 4.1: modello di un paziente sano

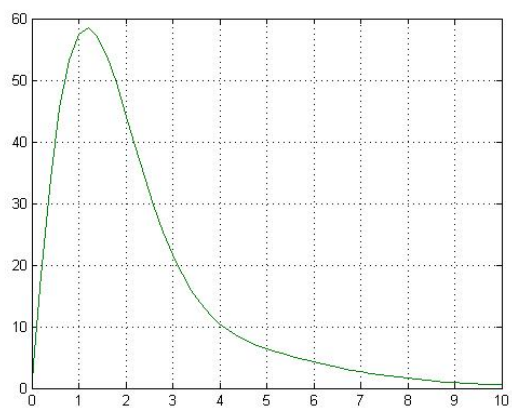


Figura 4.2: Risposta di un soggetto sano ad un ingresso esponenziale decrescente

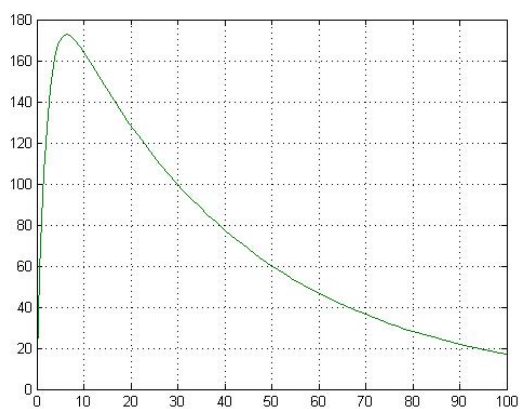


Figura 4.3: Risposta di un soggetto malato ad un ingresso esponenziale decrescente

$$\begin{aligned}\Rightarrow Y(s) &= \frac{G_1(s)}{1 - G_2(s)C(s)} U_1(s) = \frac{\frac{s+2}{s^2+2s+\theta}}{\frac{s^2+2s+\theta+5C(s)}{s^2+2s+\theta}} U_1(s) \\ &= \frac{s+2}{s^2+2s+\theta+5C(s)} U_1(s) = W(s) U_1(s)\end{aligned}$$

Affinchè $Y_{malato}(s) = Y_{sano}(s)$, occorre che:

$$W(s) = G_{1,sano}(s) \Leftrightarrow \theta + 5C(s) = 2.5 \Leftrightarrow C(s) = \frac{2.5 - \theta}{5}$$

e, di conseguenza:

$$\hat{C}(T) = \frac{2.5 - \hat{\theta}(T)}{5}.$$

Se consideriamo, come nel caso discusso precedentemente, un paziente molto malato (che corrisponde a $\theta = 0.05$), l'espressione esatta del Controllore $C(s)$ risulta essere:

$$C(s) = \frac{2.5 - 0.05}{5} = 4.9.$$

NOTA: Ovviamente $\hat{C}(T)$ sarà un controllore TEMPO-VARIANTE, poichè è funzione della stima del parametro $\hat{\theta}(T)$.

Grazie a Simulink, possiamo completare il modello utilizzato per realizzare lo stimatore del parametro, stimando anche il Controllore $\hat{C}(s)$ e utilizzando tale stimatore per intervenire sul sistema di partenza. In Figura 4.4 è rappresentato lo schema completo.

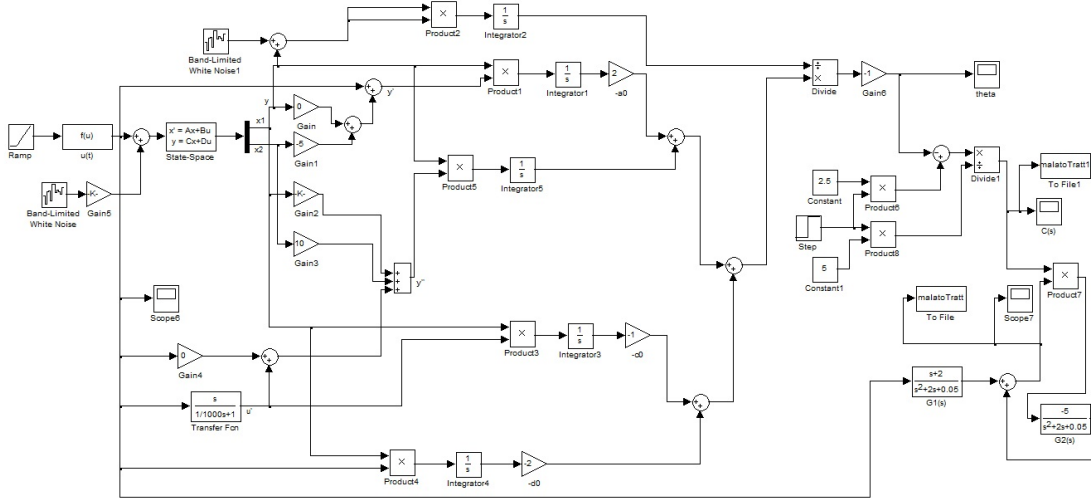


Figura 4.4: Stimatore del Controllore e modello per un malato trattato

Innanzitutto osserviamo la stima del Controllore $\hat{C}(s)$, rappresentato in Figura 4.5: dopo soli pochi centesimi di secondo, lo stimatore si porta al valore esatto 0.49.

Infine, osservando l'uscita del sistema retroazionato per il paziente malato (Figura 4.6), possiamo verificare che essa è del tutto simile alla risposta di un paziente sano al solo ingresso di cibo dall'esterno.

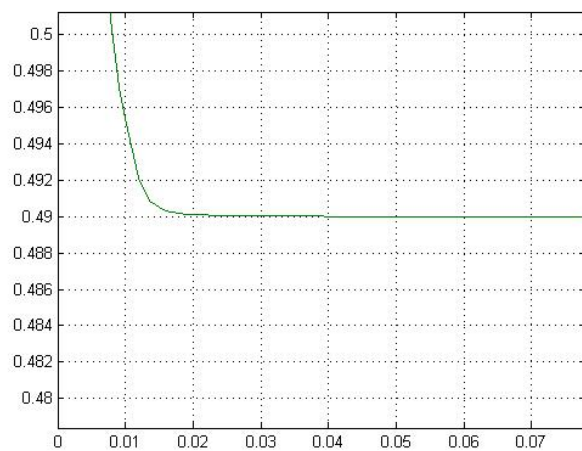


Figura 4.5: Stima del Controllore $C(s)$

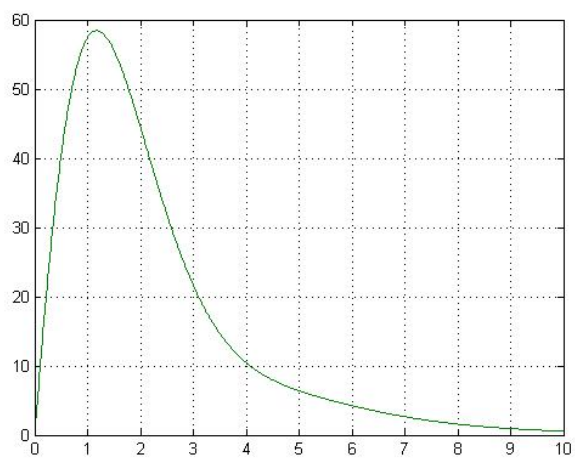


Figura 4.6: Uscita del sistema retroazionato

4.2 Controllo nel caso discreto

Anche nel caso discreto è possibile utilizzare le informazioni derivanti dalla stima, per progettare un Compensatore $C(z)$, che sia in grado di far rispondere il sistema relativo ad un paziente malato in modo molto simile alla risposta di un paziente sano.

Anche in questo caso però dobbiamo servirci delle approssimazioni già utilizzate precedentemente per costruire delle Funzioni di Trasferimento $G_1(z)$ e $G_2(z)$ che rispecchino le due FdT continue. Attraverso calcoli analoghi a quelli già riportati, si ottengono:

$$G_1(z) = \frac{(T + 2T^2)z^2 - Tz}{(1 + 2T + \theta T^2)z^2 - (2 + 2T)z + 1},$$

$$G_2(z) = \frac{-5z^2}{(1 + 2T + \theta T^2)z^2 - (2 + 2T)z + 1},$$

dove $B = -1 - 2T - \theta T^2$.

Dato che lo stimatore discreto realizzato a partire da un modello continuo si è rivelato essere il migliore, abbiamo scelto di utilizzare tale stimatore per sviluppare il problema del controllo. In ogni caso, abbiamo operato con i due periodi di campionamento $T_1 = 0.1 \text{ sec}$ e $T_2 = 0.01 \text{ sec}$.

4.2.1 Controllore discreto con $T = T_1 = 0.1 \text{ sec}$

Poichè è sempre il parametro θ l'unico a determinare la presenza o meno della malattia, le FdT discrete di un paziente sano e di uno malato differiscono solamente nel termine B che compare al denominatore. In particolare, considerando T_1 come periodo di campionamento, il paziente sano ha $G_1(z)$ pari a:

$$G_1(z) = \frac{0.12z^2 - 0.1z}{1.225z^2 - 2.2z + 1}.$$

Utilizzando l'ingresso di controllo $U_2(z) = C(z)Y(z)$, otteniamo che l'uscita del sistema retroazionato per un paziente malato corrisponde a

$$Y_{malato}(z) = \frac{G_1(z)}{1 - G_2(z)C(z)}U_1(z) = \frac{0.12z^2 - 0.1z}{(-B + 5C(z))z^2 - 2.2z + 1}U_1(z).$$

Di conseguenza, affinchè $Y_{malato}(z) = Y_{sano}(z)$, occorre uguagliare i due coefficienti di z^2 al denominatore, ovvero:

$$C(z) = \frac{1.225 + B}{5}.$$

Quindi $C(z)$ in realtà è un Compensatore costante¹, come nel caso continuo. Ricordando che $\hat{B}(N) = -1 - 2T - \hat{\theta}(N)T^2$, possiamo stimare il valore del Compensatore, sulla base delle stime ottenute per il parametro θ :

$$\hat{C}_T(N) = \frac{1.225 + \hat{B}_T(N)}{5} = \frac{1.225 + (-1 - 2T - \hat{\theta}_T(N)T^2)}{5}.$$

(Il valore vero di $C(z)$ è 0.0049).

Per valutare le prestazioni di tale compensatore, realizzato con Simulink in modo analogo al caso continuo, osserviamo le risposte ad anello aperto del paziente sano e ad anello chiuso del paziente malato rispettivamente nelle Figure 4.7 e 4.8.

¹Anche in questo caso, ovviamente, $\hat{C}(N)$ sarà un Compensatore TEMPO VARIANTE, poichè dipende dalla stima del parametro $\hat{\theta}(N)$.

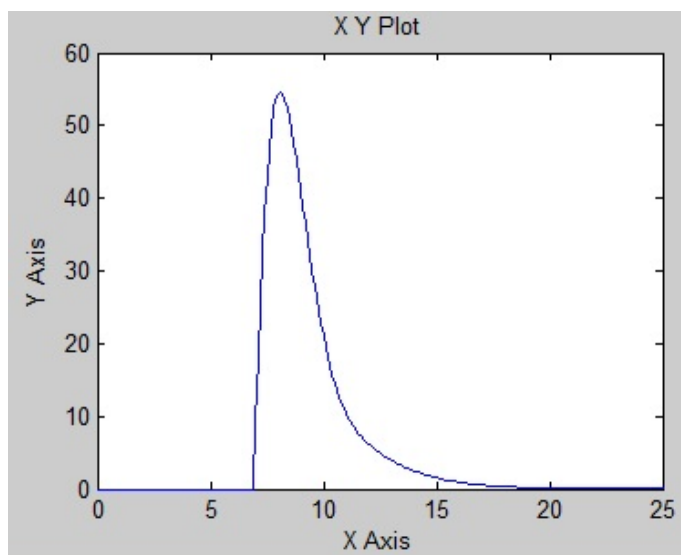


Figura 4.7: Risposta di un paziente sano ($T = 0.1 \text{ sec}$)

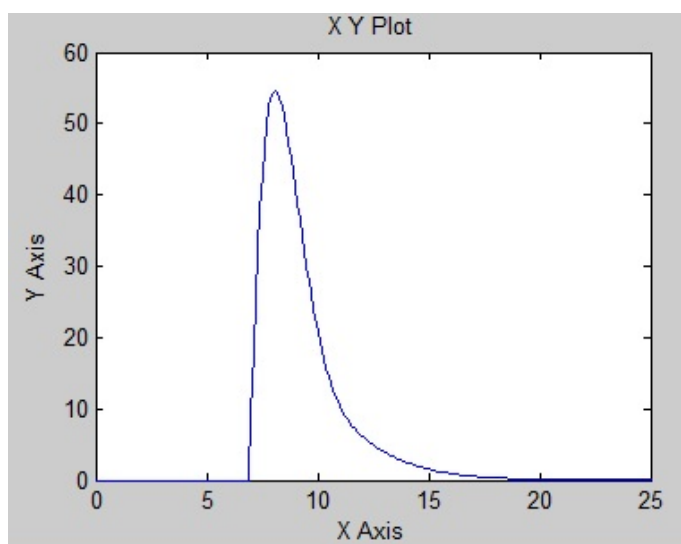


Figura 4.8: Risposta di un paziente malato dopo il controllo ($T = 0.1 \text{ sec}$)

Per poter confrontare le due uscite abbiamo ritardato l'ingresso esponenziale, per far sì che la stima del parametro θ sia a regime².

Si nota chiaramente che le due uscite $y_{sano}(t)$ e $y_{malato}(t)$ sono pressocchè identiche, raggiungendo lo scopo che ci eravamo prefissati.

4.2.2 Controllore discreto con $T = T_2 = 0.01 \text{ sec}$

Una stima ancora migliore del Compensatore l'abbiamo ottenuta diminuendo il periodo di campionamento: in questo caso, oltre ad avere uno stimatore più accurato, abbiamo anche una maggiore somiglianza della risposta del paziente sano, osservata in questo caso discreto, rispetto alla stessa osservata a tempo continuo.

In questo caso, sostituendo i valori corretti del periodo di campionamento otteniamo:

- $G_{sano,1}(z) = \frac{0.0102z^2 - 0.01z}{1.02025z^2 - 2.02z + 1}$;
- $G_{malato,1}(z) = \frac{0.0102z^2 - 0.01z}{(-B)z^2 - 2.02z + 1}$;
- $G_{malato,2}(z) = \frac{0.0102z^2 - 0.01z}{(-B)z^2 - 2.02z + 1}$.

Di conseguenza, introducendo il solito ingresso di controllo $U_2(z) = C(z)G_2(z)$, si ottiene:

$$Y_{malato}(z) = \frac{0.0102z^2 - 0.01z}{(-B + 5C(z))z^2 - 2.02z + 1}.$$

In questo caso il valore esatto del Compensatore costante $C(z)$, che rende l'uscita del sistema retroazionato analoga a quella del paziente sano è:

$$C(z) = 4.9 \cdot 10^{-5}.$$

Nelle Figure 4.9, 4.10 e 4.11, possiamo osservare la stima del Compensatore, l'uscita $y_{sano}(t)$ e l'uscita $y_{malato}(t)$.

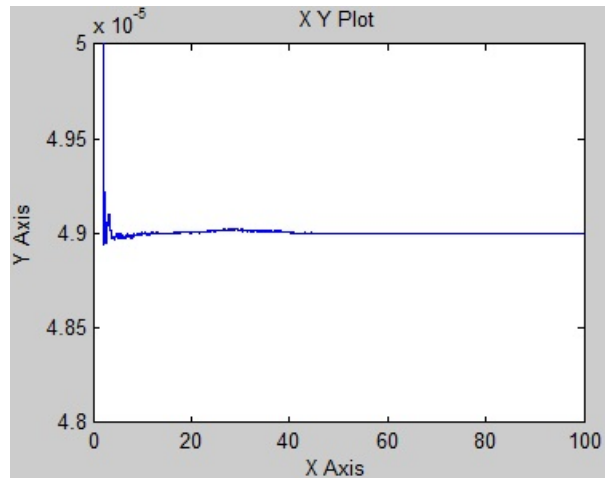


Figura 4.9: Stima del Controllore $C(z)$ ($T = 0.01 \text{ sec}$)

NOTA: Anche in questo caso é stato ritardato l'ingresso esponenziale, per poter utilizzare una stima migliore del parametro θ .

²Vedere NOTA nella pagina seguente, relativa alle simulazioni eseguite senza ritardare il segnale in ingresso.

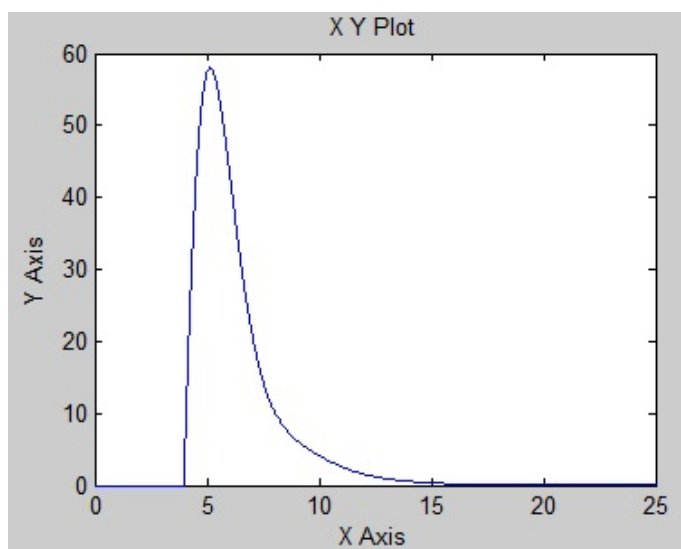


Figura 4.10: Uscita del paziente sano ($T = 0.01 \text{ sec}$)

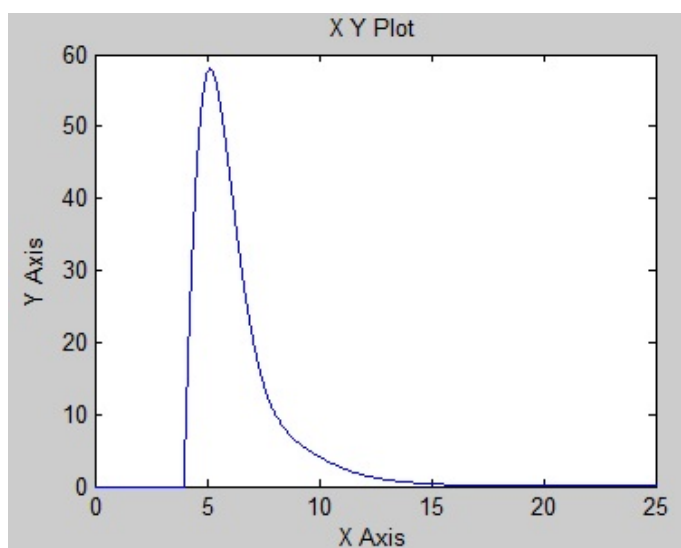


Figura 4.11: Uscita del sistema retroazionato ($T = 0.01 \text{ sec}$)

Infatti, se il segnale di ingresso non venisse ritardato, il compensatore non sarebbe in grado di rendere l'uscita retroazionata simile a quella di un paziente sano, neppure in questo secondo caso con periodo di campionamento T_2 inferiore, come si può osservare nelle Figure 4.12 e 4.13.

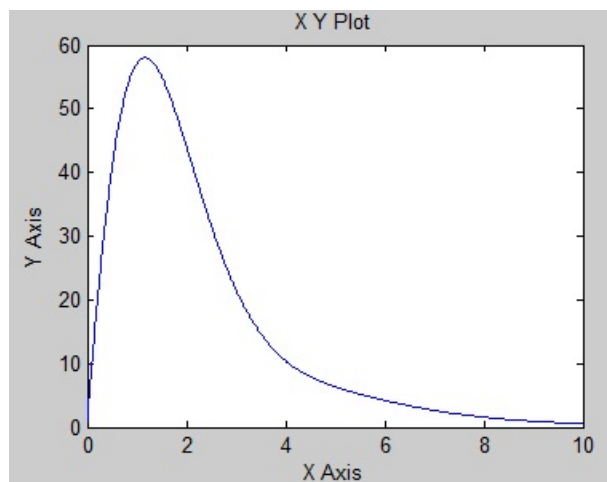


Figura 4.12: Risposta di un paziente sano con ingresso non ritardato ($T = 0.01 \text{ sec}$)

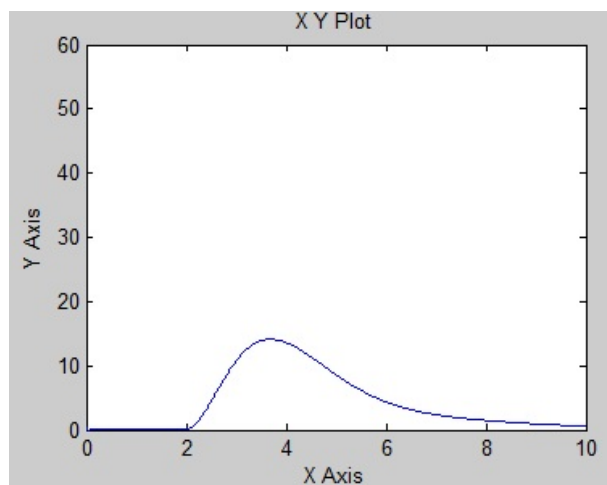


Figura 4.13: Risposta di un paziente malato dopo il controllo con ingresso non posticipato ($T = 0.01 \text{ sec}$)

Come confermano i risultati in figura, le due uscite sono molto simili, dato che la stima del valore del Compensatore risulta essere molto precisa già dopo 40 secondi. Abbiamo ottenuto quindi i risultati sperati anche in quest'ultimo test.